Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
56 t., 2015, 18–23

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

ata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you
provided by Lietuvos mate

daugiakriteriniu KEMIRA metodu

Aleksandras Krylovas, Natalja Kosareva

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas
Saulėtekio 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: aleksandras.krylovas@vgtu.lt, natalja.kosareva@vgtu.lt

Santrauka. Daugiakriteriniu KEMIRA metodu sprendžiamas atliekų perdirbimo gamyklos vietos parinkimo uždavinys. Šis metodas taikytinas, kai reikia palyginti keletą alternatyvų remiantis dviejų (arba daugiau) rūšių kriterijais. Kriterijų eiliškumui nustatyti naudojama Kemeny mediana. Svoriams rasti sprendžiamas optimizavimo uždavinys. Rezultatai palyginti su rezultatais, gautais sprendžiant tą patį uždavinį AHP ir ARAS-F metodais.

Raktiniai žodžiai: daugiakriteriniai sprendimo metodai, KEMIRA metodas.

1 Įvadas

Straipsnyje [2] buvo pasiūlytas KEMIRA metodas, leidžiantis spręsti daugiakriterinius uždavinius, kai reikia surikiuoti vertinamus dviejų (arba daugiau) rūšių (X) ir (Y) kriterijais objektus, o šie kriterijai nėra kiekybiškai suderinti tarpusavyje. Šiame darbe konkrečiu pavyzdžiu parodyta, kaip taikomas KEMIRA metodas sprendžiant inžinerinių įrenginių statybos vietos pasirinkimo uždavinį, kai naudojami Vilniaus miesto duomenys. Turėdami tikslą akcentuoti metodo taikymo aspektus, naudojame šiek tiek mažiau pateiktų straipsnyje [3] duomenų. Faktoriai $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – atstumai iki įvairių inžinerinių komunikacijų (x_1 – centralizuotų šilumos, x_2 – dujų, x_3 – elektros, x_4 – vandens tiekimo tinklų). $Y = (y_1, y_2, y_3)$ – urbanistiniai ir socialiniai faktoriai (y_1 – atstumas iki miesto centro, y_2 – gyventojų skaičius, y_3 – gyvenamųjų apartamentų plotas). Atliekų perdirbimo gamyklai statyti nagrinėjamos 7 galimos pasirinkti miesto vietos – alternatyvos $a = (a_1, \dots, a_7)$. Straipsnyje [3] pateiktos faktorių skaitinių įverčių matricos, esant visoms alternatyvoms: $X(a) = \|x_{ij}\|_{7\times 4}$, $Y(a) = \|y_{ij}\|_{7\times 3}$. Faktorių x_l, y_m svarbumą nepriklausomai ir atskirai nusakome nekiekybiniais vertinimais tik lyginant juos tarpusavyje. Pavyzdžiui, tris faktorius Y galima surikiuoti 6 būdais:

$$\begin{array}{llllll} \text{(a)} & y_1 \succ y_2 \succ y_3, & \text{(b)} & y_1 \succ y_3 \succ y_2, & \text{(c)} & y_2 \succ y_1 \succ y_3, \\ \text{(d)} & y_2 \succ y_3 \succ y_1, & \text{(e)} & y_3 \succ y_1 \succ y_2, & \text{(f)} & y_3 \succ y_2 \succ y_1. \end{array} \tag{1}$$

Straipsnyje [3] pateikta 5 ekspertų kiekybinė informacija apdorojama taikant neryškias aibes. Šiame straipsnyje naudosime apibendrintą informaciją, nurodant kurią iš (1) rikiuočių nustatė kiekvienas ekspertas. Kertinė KEMIRA metodo idėja – sukonstruoti (1) vertinimų medianą – ekspertų „apibendrintą“ nuomonę (t. y. viena arba kelios iš (a)–(f) rikiuotės) ir jos pagrindu sudaryti svertinį vidurkį:

$$Y_{W_Y} = w_{y_1}y_1 + w_{y_2}y_2 + w_{y_3}y_3, \qquad W_Y = (w_{y_1}, w_{y_2}, w_{y_3}). \tag{2}$$

Kai mediana nurodoma rikiuote $y_{(1)} \succ y_{(2)} \succ y_{(3)}$, svoriai turi tenkinti šiuos apribojimus:

$$w_{y_{(1)}} \geqslant w_{y_{(2)}} \geqslant w_{y_{(3)}}, \qquad w_{y_{(1)}} + w_{y_{(2)}} + w_{y_{(3)}} = 1. \tag{3}$$

Analogiškai konstruojamas svertinis vidurkis kitam faktoriui X_{W_X}. Svoriai W_X, W_Y pasirenkami taip, kad kriterijų X_{W_X} ir Y_{W_Y} reikšmės būtų kuo artimesnės. KEMIRA metodo algoritmas aprašomas šiais žingsniais:

1. Konstruojamos faktorių X ir Y medianos (jų gali būti kelios; žr.: (4), (6)).
2. Matricų $X(a)$ ir $Y(a)$ duomenys normuojami taip, kad visos reikšmės yra nuo 0 iki 1 ir funkcijos (2) yra didėjančios kiekvieno kintamojo y_m (ir analogiškai x_l) atžvilgiu (žr.: (8)).
3. Svoriai W_X, W_Y pasirenkami taip, kad jie tenkintų apribojimus (3) (žr.: (5), (7)) ir (2) tipo svertinių vidurkių (realiems duomenims žr.: (9)) skirtumas būtų kuo mažesnis, esant visoms alternatyvoms. Tuo tiklsu sprendžiamas optimizavimo uždavinys (10).
4. Pasirenkama ta alternatyva (alternatyvos), kuriai esant abiejų svertinių vidurkių suma $X_{W_X} + Y_{W_Y}$ įgyja didžiausią reikšmę.

2 Faktorių X ir Y medianų konstravimas

Parodykime, kaip konstruojama faktorių x_1, x_2, x_3, x_4 Kemeny mediana. Ekspertų nuomonės dėl šių faktorių svarbumo buvo šios:

Ekspertas	x_{i_1}	x_{i_2}	x_{i_3}	x_{i_4}
$(E1)$	x_1	x_4	x_2	x_3
$(E2)$	x_1	x_4	x_2	x_3
$(E3)$	x_1	x_2	x_3	x_4
$(E4)$	x_1	x_2	x_4	x_3
$(E5)$	x_1	x_2	x_4	x_3

Matome, kad visi ekspertai svarbiausiu nurodė pirmąjį faktorių x_1, o dėl kitų faktorių svarbumo ekspertų nuomonės skiriasi. Kiekvieną iš 5 rikiuočių galima traktuoti kaip paprastąjį orientuotąjį grafą [1]. Pavyzdžiui, pirmoji rikiuotė $x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3$ reiškiama grafu $R^{(1)} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(4,2),(4,3),(2,3)\}$. Tą patį grafą galima užrašyti kvadratinės matricos $A^{(1)} = (a_{ij})$, kur

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } x_i > x_j, \\ 0, & \text{kai } x_i \leqslant x_j, \end{cases} \quad \text{pavidalu: } A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogiškai kitų keturių rikiuočių matricos bus tokios:

$$A^{(2)} = A^{(1)}, \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{(4)} = A^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apibrėžkime atstumą tarp rikiuočių (čia n – faktorių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skaičius):

$$\rho\big(R^{(\alpha)}, R^{(\beta)}\big) = \rho\big(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big|a_{ij}^{(\alpha)} - a_{ij}^{(\beta)}\big|.$$

Matome, kad atstumas gaunamas skaičiuojant, kiek yra nesutampančių abiejose matricose (tose pačiose vietose) vienetų. Pavyzdžiui, $\rho(A^{(1)}, A^{(3)}) = 0+1+1+2 = 4$. Rikiuočių $R^{(1)}, \ldots, R^{(5)}$ *mediana* vadinama tokia rikiuotė R, kuriai suma $\sum_{k=1}^{5}\rho(R, R^{(k)})$ įgyja minimumą.

Ieškosime medianos R matricos $A = \|a_{ij}\|_{4\times 4}$ pavidalu. Pastebėkime, kad jei visų 5 matricų elementai su indeksais i, j yra lygūs, tai $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} = \cdots = a_{ij}^{(5)}$. Todėl $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Pastebėkime dar, kad paprastojo orientuotojo grafo matricoje [1]: $a_{ij} = 1 - a_{ji}$, kai $i \neq j$. Todėl jei $a_{24} = 1$, tai $a_{42} = 0$, arba jei $a_{34} = 0$, tai $a_{43} = 1$. Taigi mediana gali būti tik tokio pavidalo:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A'''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame sumas:

$$\sum_{k=1}^{5}\rho\big(A', A^{(k)}\big) = 12, \qquad \sum_{k=1}^{5}\rho\big(A'', A^{(k)}\big) = 6,$$

$$\sum_{k=1}^{5}\rho\big(A''', A^{(k)}\big) = 14, \qquad \sum_{k=1}^{5}\rho\big(A'''', A^{(k)}\big) = 8.$$

Taigi mediana A'' apibrėžia šią faktorių svarbumo rikiuotę:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3. \tag{4}$$

Užrašome (2) tipo svertinį vidurkį kiekvienai alternatyvai $a_1, \ldots, a_7$: $X(a) = \sum_{l=1}^{n} w_{x_l} x_l(a)$, $n = 4$. Čia svoriai w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3}, w_{x_4} tenkina (3) tipo apribojimus:

$$w_{x_1} \geqslant w_{x_2} \geqslant w_{x_4} \geqslant w_{x_3}, \qquad w_{x_1} + w_{x_2} + w_{x_3} + w_{x_4} = 1. \tag{5}$$

Parodykime, kaip konstruojama urbanistinių ir socialinių faktorių y_1, y_2, y_3 mediana. Ekspertų rikiuotės šiems faktoriams buvo: $(E1)$: $y_3 \succ y_1 \succ y_2$, $(E2)$: $y_1 \succ y_2 \succ y_3$, $(E3)$: $y_2 \succ y_3 \succ y_1$, $(E4)$: $y_2 \succ y_3 \succ y_1$, $(E5)$: $y_1 \succ y_3 \succ y_2$. Atitinkamos penkių ekspertų pirmenybių matricos:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 lentelė.

Rikiuotė	A	S	Rikiuotė	A	S
$y_1 \succ y_2 \succ y_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	14	$y_1 \succ y_3 \succ y_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	16
$y_2 \succ y_1 \succ y_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	16	$y_3 \succ y_1 \succ y_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	14
$y_2 \succ y_3 \succ y_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	14	$y_3 \succ y_2 \succ y_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	16

2 lentelė.

	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	y'_1	y'_2	y'_3
a_1	0.154	0.5	0.441	0.024	0.647	0.449	0.374
a_2	0.033	0.0	0.0	0.158	0.534	0.0	0.0
a_3	0.339	0.7	0.276	1.0	0.132	0.331	0.338
a_4	0.001	0.0	1.0	0.0	1.0	0.364	0.382
a_5	0.0	0.1	1.0	0.298	0.033	0.466	0.468
a_6	0.471	0.357	0.690	0.123	0.068	1.0	1.0
a_7	1.0	1.0	0.690	0.123	0.0	0.909	0.928

Pastebėkime, kad iš viso egzistuoja 6 skirtingos matricos $A^{(\alpha)}$, atitinkančios (1) rikiuotes, be to $\min \rho(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}) = 2$ ir $\max \rho(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}) = 6$, kai $\alpha \neq \beta$. Skaičiuosime sumų $S = \sum_{k=1}^{5} \rho(A, A^{(k)})$ reikšmes esant skirtingoms matricoms A. Sudarome pagalbinę 1-ją lentelę. Matome, kad šiuo atveju egzistuoja net trys medianos. Tarkime, kad mediana atitinka rikiuotę

$$y_3 \succ y_1 \succ y_2. \tag{6}$$

Tada svertinius vidurkius $Y(a) = \sum_{l=1}^{3} w_{y_l} y_l(a)$ kiekvienai alternatyvai skaičiuojame esant svorių apribojimams:

$$w_{y_3} \geqslant w_{y_1} \geqslant w_{y_2}, \qquad w_{y_1} + w_{y_2} + w_{y_3} = 1. \tag{7}$$

3 Duomenų normavimas

Kadangi visi faktoriai X reiškia atstumus iki įvairių inžinerinių komunikacijų, jų mažesnės reikšmes atitinka geresnes (pigesnes) alternatyvas. Perskaičiuojame faktorių X ir Y reikšmes taikydami formules:

$$x'_l(a) = \frac{\max_a x_l(a) - x_l(a)}{\max_a x_l(a) - \min_a x_l(a)}, \qquad y'_m(a) = \frac{y_m(a) - \min_a y_m(a)}{\max_a y_m(a) - \min_a y_m(a)}. \tag{8}$$

Dabar visi dydžiai įgyja neneigiamas reikšmes nuo 0 iki 1 ir didesnes faktorių reikšmes atitinka didesnės (2) tipo kriterijų reikšmės, t. y. funkcijos yra didejančios faktorių x'_l ir y'_m atžvilgiu. Surašome perskaičiuotas faktorių reikšmes į 2-ją lentelę.

3 lentelė.

Nr.	W_{x_1}	W_{x_2}	W_{x_4}	W_{x_3}	Nr.	W_{x_1}	W_{x_2}	W_{x_4}	W_{x_3}
1	10	0	0	0	12	5	5	0	0
2	9	1	0	0	13	5	4	1	0
3	8	2	0	0	14	5	3	2	0
4	8	1	1	0	15	5	3	1	1
5	7	3	0	0	16	5	2	2	1
6	7	2	1	0	17	4	4	2	0
7	7	1	1	1	18	4	4	1	1
8	6	4	0	0	19	4	3	3	0
9	6	3	1	0	20	4	3	2	1
10	6	2	2	0	21	4	2	2	2
11	6	2	1	1	22	3	3	3	1
					23	3	3	2	2

4 lentelė.

Nr.	W_{y_3}	W_{y_1}	W_{y_2}	Nr.	W_{y_3}	W_{y_1}	W_{y_2}
1	10	0	0	8	6	3	1
2	9	1	0	9	6	2	2
3	8	2	0	10	5	5	0
4	8	1	1	11	5	4	1
5	7	3	0	12	5	3	2
6	7	2	1	13	4	4	2
7	6	4	0	14	4	3	3

4 Optimizavimo uždavinys

Sudarome (2) tipo svertinius vidurkius:

$$X_{W_X}(a) = w_{x_1}x_1'(a) + w_{x_2}x_2'(a) + w_{x_3}x_3'(a) + w_{x_4}x_4'(a),$$
$$Y_{W_Y}(a) = w_{y_1}y_1'(a) + w_{y_2}y_2'(a) + w_{y_3}y_3'(a). \tag{9}$$

Svoriai W_X, W_Y turi tenkinti apribojimus (5), (7) ir parinkti taip, kad abu kriterijai $X_{W_X}(a)$, $Y_{W_Y}(a)$ būtų kuo geriau suderinti tarpusavyje:

$$F(X,Y) = \min_{W_X, W_Y} \sum_a \left| X_{W_X}(a) - Y_{W_Y}(a) \right|. \tag{10}$$

Šį optimizavimo uždavinį spręsime apytiksliai, sudarant baigtines nagrinėjamų variantų aibes. Svorius W_X konstruosime taip. Tarkime, kad W_{x_k} yra neneigiami sveikieji skaičiai $0, 1, \ldots, 10$ ir $w_{x_k} = \frac{W_{x_k}}{10}$. Tada visus variantus surašome į 3-ją lentelę.

Analogiškai konstruojame svorius $w_{y_k} = \frac{W_{y_k}}{10}$ (žr. 4-ją lentelę).

Norėdami gauti tikslesnius rezultatus, tinklą galime smulkinti.

5 Rezultatai

Kiekvienai iš $23 \times 14 = 322$ svorių kombinacijų apskaičiuojama funkcijos (10) reikšmė. Ta pati procedūra atliekama, imant kitas kriterijaus Y medianas: $y_1 \succ y_2 \succ y_3$ ir

$y_2 \succ y_3 \succ y_1$. Mažiausia funkcijos (10) reikšmė $F(X,Y) = 1{,}285$ buvo gauta esant tokiems svoriams:

$$w_{x_1} = 0,4; \qquad w_{x_2} = w_{x_4} = w_{x_3} = 0,2; \qquad w_{y_3} = 0,8; \qquad w_{y_1} = 0,2; \qquad w_{y_2} = 0.$$

Pastebėkime, kad gyventojų skaičius gamyklai parinktoje teritorijoje turi nulinį svorį. Smulkindami tinklą gautume tikslesnes svorių reikšmes, galbūt tada nulinių reikšmių nebūtų. Gavus kriterijų svorius alternatyvos ranguojamos pagal svertinių vidurkių sumos $X_{W_X} + Y_{W_Y}$ reikšmes. Alternatyvų rangavimo rezultatai:

$$a_7 \succ a_6 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2.$$

Palyginus su rezultatais, gautais straipsnyje [3] skirtumas yra nežymus – tik alternatyvos a_4 ir a_5 apsikeitė vietomis.

Taigi pasiūlytas šiame straipsnyje KEMIRA metodas leidžia gauti beveik tuos pačius rezultatus turint žymiai mažiau pradinių duomenų – straipsnyje [3] buvo naudojami 6 inžineriniai ir 4 urbanistiniai ir socialiniai faktoriai.

Mūsų tolesni tyrimai susiję su optimizavimo uždavinio sprendimo būdų paieška ir pritaikymu sprendžiant panašias taikomojo pobūdžio problemas.

Literatūra

[1] A. Krylovas. *Diskrečioji matematika.* Technika, Vilnius, 2009.

[2] A. Krylovas, E.K. Zavadskas, N. Kosareva and S. Dadelo. New KEMIRA method for determining criteria priority and weights in solving MCDM problem. *Int. J. Inf. Technol. Decis. Mak.*, **13**(06):1119–1133, 2014.

[3] Z. Turskis, M. Lazauskas and E.K. Zavadskas. Fuzzy multiple criteria assessment of construction site alternatives for non-hazardous waste incineration plant in Vilnius city, applying ARAS-F and AHP methods. *J. Env. Eng. Landsc. Manag.*, **20**(2):110–120, 2012.

SUMMARY

The factory site selection task solution by multiple criteria decision method KEMIRA

A. Krylovas, N. Kosareva

In the article waste processing plant siting task is solved by MCDM method KEMIRA. This method is appropriate for comparing few alternatives using criteria of two (or more) of heterogeneous types. Kemeny median is applied for ranking the alternatives. Weights determining task is solved by solving optimization problem. The results are compared with the results obtained for the same task using AHP and ARAS-F methods.

Keywords: multiple criteria decision making, KEMIRA method.